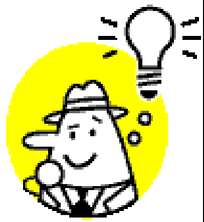
LÓGICA PROPOSICIONAL

INTRODUCCIÓN



La lógica es, probablemente, una de las ciencias de mayor importancia para la civilización humana. El desarrollo que ha alcanzado en este último siglo y principalmente estas últimas décadas, la ha convertido en el imprescindible referente del desarrollo científico y tecnológico del mundo contemporáneo.

LÓGICA PROPOSICIONAL

Parte de la lógica que tiene por objeto de estudio la *proposición* y la relación entre ellas, así como las variables proposicionales y conectivos lógicos.

ENUNCIADO.- Es toda frase u oración que se utiliza en el lenguaje común, por ejemplo:

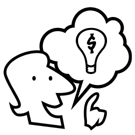
Ejemplos:

- Chota es una provincia cajamarquina
- Lima es la capital del Perú
- El doble de 3 es 5
- ¿Qué hora es?
- ¡Auxilio!
- ¡Viva el ISEP NSCH"
- x + 2 = 7

ENUNCIADO CERRARDO O PROPOSICIÓN LÓGICA.- Es toda expresión coherente que se caracteriza por el hecho de poseer un valor de verdad o veritativo es decir si es verdadera (V) o falsa (F) sin ambigüedad en un determinado contexto.

Generalmente las proposiciones se denotan con letras minúsculas, como: p, q, r, s,…: por ejemplo:

- p: Lima es la capital del Perú (V)
- q: El doble de 3 es 5 (F)



NOTA: Los mandatos, preguntas, exclamaciones, no son proposiciones lógicas, ya que no se pueden calificar de verdaderas o falsas.

Ejemplos: ¿Qué hora es?
¡Auxilio!

ENUNCIADO ABIERTO.- Es aquel enunciado que admite la posibilidad de convertirse en una proposición lógica, cuando cada variable asume un valor determinado. **Ejemplos**:

x + 2 = 7

Si: x = 5 5 + 2 = 7 (V)

Si: x = 3 3 + 2 ≠ 7 (F)

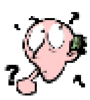
CLASES DE PROPOSICIONES

1. **Proposición Simple o Atómica**.- Es aquella proposición que nos expresa una sola idea.

   Ejemplo:

   - p: El acero es un metal
   - q: $5^2 = 25$

NOTA: Se llaman conectivos lógicos a las palabras que sirven para enlazar proposiciones o cambiar el valor veritativo de una proposición.

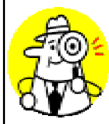


EN EL LENGUAJE COMÚN	SÍMBOLO
No es cierto que …	~
… y …	$\wedge$
… o …	$\vee$
Si … entonces …	$\rightarrow$
… si y sólo si …	$\leftrightarrow$

2. **Proposición Compuesta o Molecular.-** Es aquella proposición que expresa más de una idea o la negación de una proposición.

   Ejemplos:

   - Miguel Grau fue marino y peruano.
   - La carpeta es de madera o metal.
   - No es cierto que Chota es un departamento.



NOTA: Los valores de verdad de una o más proposiciones se pueden esquematizar por medio de una tabla de verdad como:

Para una proposición

p
V
F

Para dos proposiciones

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Para tres proposiciones

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

PROPOSICIONES COMPUESTAS BÁSICAS

1. **Negación (~)**

   Ejemplo:

   $\underbrace{\text{No es cierto que}}_{\sim}$ $\underbrace{\text{el sol es un planeta}}_{p}$

p	~p
V	F
F	V

2. **Conjunción ($\wedge$)**

   Ejemplo:

   $\underbrace{\text{Miguel Grau fue peruano}}_{p}$ $\underbrace{\text{y}}_{\wedge}$ $\underbrace{\text{Pablo Neruda chileno}}_{q}$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Se observa que una conjunción es verdadera solo si sus componentes son verdaderos, en otros casos será falsa. Las palabras sin embargo, además, no obstante, pero, aunque, no obstante, también, así como, a la vez, tal como, tanto como, al igual que, incluso, así mismo", etc., equivalen al conectivo ($\wedge$).

3. Disyunción ($\vee$)

a. Inclusiva (débil)

1

Ejemplo:

Lorena Ramos es modelo o cantante
p $\vee$ q

P	q	$p \vee q$
V	V	**V**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Se observa que la disyunción inclusiva es falsa solo si sus componentes son falsos, en caso contrario es verdadera. Las palabras o, u, salvo, a menos que, excepto, equivalen al conectivo ($\vee$).

b. Exclusiva (fuerte)

Ejemplo:

La puerta está abierta o cerrada
p Δ q

P	q	$p \Delta q$
V	V	**F**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Se observa que la disyunción exclusiva es verdadera solo si sus componentes tienen valores veritativos opuestos, en caso contrario será falsa. Las palabras "o" … "o" …, equivalen al conectivo (Δ).

4. Condicional ($\rightarrow$)

Ejemplo:

Si llueve entonces la producción es buena
p $\rightarrow$ q

p: Antecedente
q: Consecuente

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

Se observa que la condicional es falsa solo si su antecedente es verdadero y su consecuente falso, en caso contrario es verdadera. Las expresiones:

- Si p entonces q
- p implica q
- p por lo tanto q
- p conclusión q
- p luego q
- p por consiguiente q
- p de ahí que q
- p de modo que q
- p deviene q
- dado p por eso q
- cuando p a si pues q
- de p derivamos q

Son equivalentes a ($p \rightarrow q$)

5. Bicondicional ($\leftrightarrow$)

Ejemplo:

Iré a la fiesta si y solo si tengo ropa nueva
p $\leftrightarrow$ q

P	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

Se observa que la bicondicional es verdadera solo si los valores de verdad de sus componentes son iguales, en caso contrario es falsa. Sus formas gramaticales son: si y solo si, solamente si, cuando y solo cuando; entonces y solo entonces; es idéntico, cada vez que y solo si,…, etc., son equivalentes a ($p \leftrightarrow q$).

ESQUEMAS PROPOSICIONALES

Generalmente las proposiciones estarán formadas por varias proposiciones simples generando un esquema proposicional.

Ejemplo:

- $(p \vee \sim q) \rightarrow q$
- $(\sim p \wedge q) \wedge (q \rightarrow r)$

Ejemplo:

Halle la tabla de verdad de: $(p \vee \sim q) \rightarrow q$

p	q	(p	$\vee$	~ q)	$\rightarrow$	q
V	V	V	V	F	**V**	V
V	F	V	V	V	**F**	F
F	V	F	F	F	**V**	V
F	F	F	V	V	**F**	F

JERARQUÍA DE LOS SIGNOS DE PUNTUACIÓN

- Coma Menor jerarquía
- Punto y coma
- Punto
- Dos signos de puntuación: mayor jerarquía

Ejemplo: Formalizar la expresión: "Si recibió su pago entonces comprará su TV, pero no recibió su pago y se fue triste"

p: Recibió su pago

q: Compra su TV

r: Se fue triste

$(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \wedge r)$

TIPOS DE PROPOSICIONES

1. **TAUTOLOGÍA**.- Un esquema proposicional es una tautología si al evaluar todas las posibles ordenaciones de los valores veritativos de las variables proposicionales que la componen siempre resulta verdadero.

   Ejemplo: Halle la tabla de verdad de:

   $[(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$

2. **Contradicción.-** Es una contradicción si al evaluar todas las ordenaciones de los valores veritativos de las variables proposicionales que la componen resulta falso.

   Ejemplo: Halle la tabla de verdad de:

   $[(p \wedge q) \vee q] \wedge \sim q$

3. **Contingencia.-** Un esquema proposicional es una contingencia si su tabla de verdad contiene al menos un verdadero y al menos un falso.

   Ejemplo: Halle la tabla de verdad de:

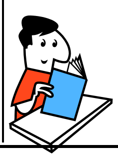
   $(p \rightarrow q) \rightarrow p$

EQUIVALENCIA LÓGICA

Se llama equivalencia lógica a toda bicondicional ($p \leftrightarrow q$) que sea una tautología, denotándose en tal caso: ($p \leftrightarrow q$)

Por ejemplo: $[p \wedge (p \vee q)] \leftrightarrow p$

ESQUEMAS PROPOSICIONALES LÓGICAMENTE EQUIVALENTES



Dos esquemas proposicionales se llaman equivalentes ($\equiv$) si sus tablas de verdad son idénticas:

Determine si: A: $(p \rightarrow q)$

B: $[\sim p \vee q]$

son equivalentes

LEYES DEL ÁLGEBRA PROPOSICIONAL

1. Idempotencia

$p \vee p \equiv p$

$p \wedge p \equiv p$

2. Asociativa

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

3. Conmutativa

$p \vee q \equiv q \vee p$

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

4. Distributiva

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

5. De D'Morgan

$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

6. Absorción

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

7. De la condicional

$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

8. COMPLEMENTO

$p \vee \sim p \equiv V$

$p \wedge \sim p \equiv F$

$\sim V \equiv F$

$\sim F \equiv V$

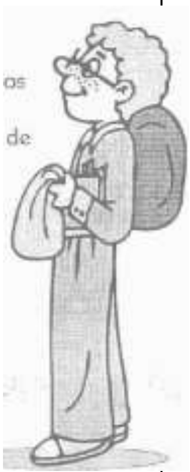
Adicionales

$p \vee V \equiv \mathbf{V}$

$p \vee F \equiv p$

$p \wedge V \equiv p$

$p \wedge F \equiv \mathbf{F}$



Ejercicios de Aplicación

1. Halla la tabla de verdad de:

$$(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$$

A) VFVF B) VVVV C) FFFF D) VFFV E) FFFV

2. Halle la tabla de verdad de:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

A) Tautología B) Contingencia C) Contradicción

3. Halle la tabla de verdad de:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$$

A) Contingencia B) Contradicción C) Tautología

4. Determine la matriz principal de la siguiente proposición: $(p \vee q) \wedge (r \vee p)$

A) Contingencia B) Contradicción C) Tautología

5. Determine la matriz principal de la siguiente proposición: $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$

A) Contingencia B) Contradicción C) Tautología

6. Determine la matriz principal de la siguiente proposición: $[(p \rightarrow q) \wedge q] \leftrightarrow \sim p$

A) Consistente B) Contradicción C) Tautología

7. Determine la matriz principal de la siguiente proposición: $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$

A) Consistente B) Contradicción C) Tautología

8. Si p, q, r, s, t, w son proposiciones lógicas tales que $(p \rightarrow \sim r) \leftrightarrow (s \rightarrow w)$ es verdadera y $(\sim w \rightarrow \sim s)$ es falsa. Entonces determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $\sim p \rightarrow (q \leftrightarrow t)$

II) $(r \rightarrow \sim s) \rightarrow (q \vee t)$

III) $(w \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee \sim t)$

A) VVF
B) FVV
C) VVV
D) FVF
E) VFV

9. Si $(p \vee r) \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$ es falsa, entonces indique el valor de verdad de las siguientes expresiones proposicionales:

I) $\sim p \wedge q$ II) $(p \vee r) \rightarrow p$ III) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

A) FVF B) FFV C) FVV D) FFF E) VFV

10. Si la proposición: $(r \vee s) \rightarrow [(p \wedge \sim s) \rightarrow (p \wedge \sim q)]$ es falsa, entonces determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $(p \wedge \sim q) \leftrightarrow r$

II) $q \wedge (\sim p \vee \sim s)$

III) $[\sim p \rightarrow r] \vee \sim s$

A) VVV B) VFV C) VFF D) FVV E) FVF

11. Si la proposición $(p \wedge q) \rightarrow (\sim s \rightarrow r)$ es falsa, entonces determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $[\sim p \rightarrow (\sim q \rightarrow r)] \vee [p \rightarrow (\sim q \wedge s)]$

II) $\{[q \vee (s \rightarrow t)] \rightarrow u\} \wedge \{\sim s \wedge r\}$

III) $(p \rightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \sim q)$

A) VFF B) VVF C) FVV D) FVF E) FFF

12. Si p, q, r, s, t, u, v y w son proposiciones lógicas tal que: $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ es falsa, $q \leftrightarrow (p \rightarrow t)$ es falsa, indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $\sim t \wedge (r \rightarrow w)$ II) $q \vee (\sim r \leftrightarrow u)$ III) $t \rightarrow (s \Delta r)$

A) VVV B) VVF C) VFV D) FVV E) FFF

13. Simbolice correctamente:

No estudié para el examen final porque trabajé hasta tarde; ya que llegaron muchos clientes.

A) $p \rightarrow (\sim q \rightarrow r)$ B) $\sim p \rightarrow (q \wedge r)$

C) $p \rightarrow (q \rightarrow \sim r)$ D) $r \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$

14. Si la proposición: "No es cierto que, estudiemos y no aprobemos", es verdadera, entonces podemos afirmar:

A) Aprobamos y no estudiamos
B) Estudiamos o aprobamos
C) Estudiamos o no aprobamos
D) Aprobamos o no estudiamos
E) Estudiamos y aprobamos

Tarea Domiciliaria

1. Construir una tabla de verdad para:
   $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
   y diga si es:
   A) Consistente
   B) Contradicción
   C) Tautología

2. Determine la matriz principal de la siguiente proposición: $[(\sim p) \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$
   A) Consistente B) Contradicción C) Tautología

3. Evalúe la siguiente proposición: $P \wedge [(\sim p) \wedge (\sim q)]$
   A) Consistente B) Contradicción C) Tautología

4. Si p es verdadera, determine el valor de verdad de $\sim p \rightarrow (p \vee q)$
   A) Verdadero B) Falso

5. Si la proposición compuesta $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee t)$ es falsa. Indique las proposiciones que son verdaderas
   A) q y r B) p y q C) r y t D) q y t E) p y t

6. Evalúe el siguiente esquema molecular y diga cuántas verdaderas tiene el resultado.
   $[\sim p \rightarrow \sim(q \wedge r)] \,\Delta\, [(r \rightarrow \sim q) \vee p$
   A) 2 B) 5 C) 6 D) 7 E) 0

7. La proposición "viajas a Piura **a menos que** no vayas al Cuzco", es falsa si:
   A) No viajas a Piura ni al Cuzco.
   B) Viajas a Piura y al Cuzco.
   C) Viajas a Piura y no al Cuzco.
   D) No viajas a Piura y si al Cuzco.
   E) No se puede precisar.

8. La proposición: "Si no tomas en serio las cosas tendrás problemas para ingresar o no serás profesional", es falsa. ¿Qué valor de verdad asume la proposición: "No tienes problemas para ingresar"?
   A) Verdadero B) Falso C) Contradictorio

9. Dadas las proposiciones:
   p: Lenin aprueba sus cursos
   q: Lenin va a la fiesta
   r: Lenin estudia para su examen
   Simbolizar: "Si Lenin va a la fiesta entonces no estudiará para su examen, pero no es el caso que vaya a la fiesta y aprueba sus cursos. De ahí que Lenin estudia para su examen".
   A) $[(q \rightarrow r) \wedge \sim(q \wedge p)] \rightarrow r$
   B) $[(q \rightarrow \sim r) \wedge \sim(q \wedge p)] \rightarrow r$
   C) $[(q \rightarrow r) \vee \sim(q \wedge p)] \rightarrow \sim r$
   D) $[(q \rightarrow r) \wedge \sim(q \wedge p)] \rightarrow \sim r$
   E) $[(q \rightarrow r) \vee \sim(q \wedge p)] \rightarrow r$

10. Halle la tabla de verdad de: $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$
    A) VFVF B) VVVV C) FFFF D) VFFV E) FFFV

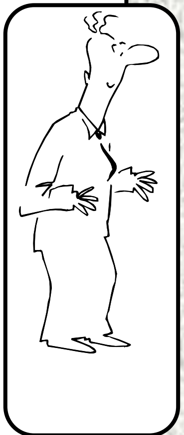
11. Si: $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$ es falsa, determine el valor de p, q y r
    A) VVV B) FFF C) VFF D) VFF E) FVF

12. Si la proposición compuesta: $\sim[(p \wedge \sim r) \rightarrow (r \,\Delta\, \sim q)]$ es verdadera, halle el valor de verdad de las proposiciones r, p y q respectivamente.
    A) VVF B) FVV C) VFV D) FVF E) FFV

13. Formalizar: "Si luchas por triunfar, entonces triunfarás, sin embargo no luchas por triunfar"
    A) $p \rightarrow (q \wedge r)$ B) $p \rightarrow (q \wedge \sim r)$
    C) $(p \rightarrow q) \wedge \sim p$ D) $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$

14. Si la proposición: $(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim r \rightarrow s)$ es falsa. Deduce el valor de verdad de:
    I) $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$
    II) $[(\sim r \vee q) \wedge q] \leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$
    III) $(p \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$
    A) FVV B) FFV C) VFV D) FFF E) VFF

Reto Matemático...



- **Problema de las edades**

Dos amigos mantienen esta conversación:

- ¿Cuántos años tienen ya tus tres hijos?-pregunta el primero.
- Seguro que lo aciertas -contesta el segundo-. El producto del número de años que tienen es 36 y su suma es igual al número de tu casa.
- Me falta un dato -dice el primero transcurrido un instante.
- Ah, ¡es verdad! -reconoce el segundo-. La mayor toca el piano.

¿Sabrías decir las edades de los tres hijos?